

TD 28 : Dimension des espaces vectoriels **Indications**

— Familles libres, génératrices en dimension finie —

1 ★

1) Est-ce que

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ln 2 \\ \pi \\ e^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{ch } 1 \\ \text{sh } 1 \\ \text{th } 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^{1/\pi} \\ e^{e^e} \\ (10!)! \end{pmatrix} \right)$$

est une famille libre de $\mathbb{R}^3$?

2) Est-ce que

$$\mathcal{F} = (X^3 - X^2, X^2 - X, X - 1)$$

est une famille génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$?

2 ★★ On considère la famille de 3 vecteurs

$$u = (1, 1, -1) \quad v = (1, -1, 1) \quad w = (-1, 1, 1)$$

1) Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer les coordonnées du vecteur $(2, 1, 3)$ selon la base $\mathcal{B}$.

2 On cherche donc $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $(2, 1, 3) = \alpha u + \beta v + \gamma w$.

3 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille

$$\mathcal{F} = (1 + X, X + X^2, \dots, X^{n-1} + X^n, X^n)$$

est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4 ★★ On pose

$$\mathcal{F} = ((1, -1, -1), (3, 3, 1), (2, 4, 2))$$

et $G = \text{Vect}(\mathcal{F})$.

1) Montrer que $\mathcal{F}$ est liée. Que peut-on en déduire sur la dimension de G ?

2) Déterminer la dimension de G et donner trois bases différentes de G .

5 ★★ Soit E un $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E . On pose

$$\varepsilon_1 = e_1 + e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = e_1 - 2e_3$$

Montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre et la compléter en une base de E .

Dimension, supplémentaires

6 ★ On considère les s.e.v. suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 5y + z = 0\}$$

$$G = \text{Vect}((0, 1, -1))$$

1) Déterminer une base de F et une base de G .

2) Montrer que F et G sont supplémentaires.

7 ★ Soit F et G deux s.e.v. de $\mathbb{R}^5$ de dimension 3. Montrer que F et G ne sont pas en somme directe.

8 ★★ On pose :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad 2x - y = 0\}$$

1) Montrer que F est un e.v. et déterminer sa dimension.

2) Trouver un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

9 ★★ On considère les s.e.v. suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$$

1) Déterminer une base de F et une base de G .

2) Montrer que F et G sont supplémentaires.

10 ★★ On définit les s.e.v. suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y = 0\}$$

- 1) Déterminer la dimension de F ainsi qu'une base de F .
- 2) Même question pour G .
- 3) Même question pour $F \cap G$.
- 4) Même question pour $F + G$.

3 Réécrire $F \cap G$ en tant qu'ensemble avec deux équations, qu'il faut ensuite réécrire sous forme de Vect.

4 Une astuce vous permettra de conclure rapidement.

11 ★★ Soit E un e.v. de dimension $n \geq 1$. Soit G et H deux s.e.v. de dimension $n - 1$ distincts.

- 1) Quelles sont les valeurs possibles de $\dim(G + H)$?
- 2) En déduire $G + H$, puis la dimension de $G \cap H$.

1) $G + H$ est au moins aussi "gros" que G ... Cela doit laisser deux valeurs possibles.

2) Trouver la dimension de $G + H$, pour en déduire $G \cap H$.

12 ★★★ Soit E un e.v. de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F et G deux s.e.v. de même dimension $p < n$.

- 1) On suppose que $p = n - 1$. Montrer que F et G ont un supplémentaire commun, i.e. qu'il existe un s.e.v. H de E tel que $F \oplus H = G \oplus H = E$. On pourra admettre que $F \cup G \neq E$.
- 2) En déduire le résultat pour p quelconque par récurrence descendante sur p .

1) Quelle est la dimension de H ? Se représenter la situation avec $n = 3$ ou $n = 2$ pour voir comment on peut choisir un tel ensemble H .

2) Prendre un vecteur u qui n'est ni dans F , ni dans G , et appliquer l'hypothèse de récurrence à $F' = \text{Vect}(F \cup \{u\})$ et $G' = \text{Vect}(G \cup \{u\})$.

Applications diverses "hors $\mathbb{R}^n$ "

13 ★★ On pose

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x & x-y \\ x+y & 2y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Montrer que E est un e.v. et déterminer la dimension de E .

14 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Rappeler quelle est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- 2) Déterminer une famille génératrice de $D_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices diagonales, construite à partir de matrices de la question 1.
- 3) En déduire une base de $D_n(\mathbb{K})$, puis sa dimension.
- 4) Reprendre les questions 2 et 3 pour $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, ensemble des matrices triangulaires supérieures.

Que ce soit pour $D_n(\mathbb{K})$ ou $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, la dimension peut aisément se prévoir en regardant le nombre de "degrés de libertés" parmi les coefficients des matrices de ces ensembles.

15 ★★ On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices (de taille n) symétriques et antisymétriques respectivement.

- 1) Déterminer une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, ainsi que leurs dimensions.
- 2) En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Partir de la forme générale d'une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, identifier le nombre de "degrés de libertés" parmi les coefficients et en déduire les matrices qui constituent cette base.

16 ★★★ Montrer que les ensembles suivants sont des e.v. et déterminer leur dimension (finie ou non) :

- 1) $F = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A_{11} + \dots + A_{nn} = 0\}$
- 2) $F_p = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = u_n\}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$
- 3) $F_n = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P(-X) = P(X)\}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
- 4) $F = \{x \mapsto \sin(x + \varphi) \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$

Partir de la forme générale d'un élément de chacun de ces ensembles et essayer de deviner la dimension en regardant le nombre de "degrés de libertés" dont on dispose.

17 ★★★ Montrer que l'e.v. $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est de dimension infinie.

Trouver une famille libre infinie de cet e.v.